第５講　２次曲線

5

［A］　円 C_1：$x^2+(y-1)^2=1$ と楕円 C_2：$\dfrac{x^2}{4}+y^2=1$ を考える．

(1)　C_1 上の点 $\mathrm{P}(a,\ b)$ を固定し，点 $\mathrm{Q}(x,\ y)$ を C_2 上で動かしたとき，内積 $\overrightarrow{\mathrm{OP}}\cdot\overrightarrow{\mathrm{OQ}}$ の最大値を b で表せ．ただし，O は原点とする．

(2)　P を C_1 上，Q を C_2 上で動かしたとき，内積 $\overrightarrow{\mathrm{OP}}\cdot\overrightarrow{\mathrm{OQ}}$ の最大値を求めよ．

［B］　双曲線 C：$9x^2-y^2=9$ について，次の(1)，(2)，(3)に答えよ．

(1)　この双曲線の焦点の座標と漸近線の方程式を求めよ．

(2)　直線 l：$y=mx+n$ と双曲線 C が異なる２つの共有点をもつための条件を m，n の式で表せ．

(3)　直線 l と双曲線 C の共有点を P，Q，直線 l と双曲線 C の２本の漸近線との共有点を R，S とするとき PR＝QS が成立することを証明せよ．

ⒸRECRUIT HOLDINGS

本サービスに関する知的財産権その他一切の権利は著作権者に帰属します。
また本サービスに掲載の全部または一部につき無断複製・転載を禁止します。

＜ Note ＞

ⒸRECRUIT HOLDINGS

本サービスに関する知的財産権その他一切の権利は著作権者に帰属します。
また本サービスに掲載の全部または一部につき無断複製・転載を禁止します。

第５講　２次曲線

5　次の問いに答えよ．

(1)　p を正の定数とし，点 $\mathrm{F}(0,\ p)$ を焦点にもち，$y=-p$ を準線とする放物線を C とする．C 上の点 $\mathrm{Q}(x_0,\ y_0)$（ただし $x_0 \neq 0$）を考え，点 Q と F を通る直線を l_1，点 Q を通り放物線 C の軸に平行な直線を l_2 とする．このとき，点 Q における C の接線 l は，l_1 と l_2 のなす角を２等分することを示せ．

(2)　放物線 $y=x^2-2\sqrt{2}\,x+4$ 上の点 $\mathrm{R}(a,\ b)$（$a>\sqrt{2}$）における接線と直線 $x=a$ のなす角を $\theta\left(0<\theta<\dfrac{\pi}{2}\right)$ とする．点 R を通り傾きが $\dfrac{1-\tan^2\theta}{2\tan\theta}$ である直線は a によらない定点を通ることを示し，その定点の座標を求めよ．

©RECRUIT HOLDINGS

本サービスに関する知的財産権その他一切の権利は著作権者に帰属します。
また本サービスに掲載の全部または一部につき無断複製・転載を禁止します。

＜ Note ＞

ⒸRECRUIT HOLDINGS

本サービスに関する知的財産権その他一切の権利は著作権者に帰属します。
また本サービスに掲載の全部または一部につき無断複製・転載を禁止します。

第5講　2次曲線

5

［A］ 円 $C_1：x^2+(y-1)^2=1$ と楕円 $C_2：\dfrac{x^2}{4}+y^2=1$ を考える．

(1) C_1 上の点 $\mathrm{P}(a,\ b)$ を固定し，点 $\mathrm{Q}(x,\ y)$ を C_2 上で動かしたとき，内積 $\overrightarrow{\mathrm{OP}}\cdot\overrightarrow{\mathrm{OQ}}$ の最大値を b で表せ．ただし，O は原点とする．

(2) P を C_1 上，Q を C_2 上で動かしたとき，内積 $\overrightarrow{\mathrm{OP}}\cdot\overrightarrow{\mathrm{OQ}}$ の最大値を求めよ．

［B］ 双曲線 $C：9x^2-y^2=9$ について，次の(1)，(2)，(3)に答えよ．

(1) この双曲線の焦点の座標と漸近線の方程式を求めよ．

(2) 直線 $l：y=mx+n$ と双曲線 C が異なる 2 つの共有点をもつための条件を m，n の式で表せ．

(3) 直線 l と双曲線 C の共有点を P，Q，直線 l と双曲線 C の 2 本の漸近線との共有点を R，S とするとき PR＝QS が成立することを証明せよ．

【答】 ［A］ (1) $\sqrt{8b-3b^2}$　(2) $\dfrac{4\sqrt{3}}{3}$

［B］ (1) 焦点 $(\pm\sqrt{10},\ 0)$，漸近線 $y=\pm 3x$　(2) $m\neq\pm 3$ かつ $m^2-n^2<9$　(3) 略

【解説】

［A］ (1)

$$\begin{cases}\overrightarrow{\mathrm{OP}}=(a,\ b)\\ \overrightarrow{\mathrm{OQ}}=(x,\ y)=(2\cos\beta,\ \sin\beta)\quad(0\leqq\beta<2\pi)\end{cases}$$

と表せる．

$$\overrightarrow{\mathrm{OP}}\cdot\overrightarrow{\mathrm{OQ}}=2a\cos\beta+b\sin\beta$$
$$=\sqrt{4a^2+b^2}\cos(\beta+\theta)$$

となる θ が存在するので $\overrightarrow{\mathrm{OP}}\cdot\overrightarrow{\mathrm{OQ}}$ の最大値は $\sqrt{4a^2+b^2}$ であるが，$a^2+(b-1)^2=1$ より $a^2=2b-b^2$ となるので求める最大値は

$$\sqrt{4a^2+b^2}=\boldsymbol{\sqrt{8b-3b^2}}$$

(2) $\mathrm{P}(a,\ b)$ は C_1 上の点より

$$0\leqq b\leqq 2$$

(1)より $\sqrt{8b-3b^2}=\sqrt{-3\left(b-\dfrac{4}{3}\right)^2+\dfrac{16}{3}}$ であるから $\overrightarrow{\mathrm{OP}}\cdot\overrightarrow{\mathrm{OQ}}$ の最大値は

$$\sqrt{\frac{16}{3}}=\boldsymbol{\frac{4\sqrt{3}}{3}}$$

ⒸRECRUIT HOLDINGS

本サービスに関する知的財産権その他一切の権利は著作権者に帰属します。
また本サービスに掲載の全部または一部につき無断複製・転載を禁止します。

［B］ (1) $\sqrt{9+1}=\sqrt{10}$ より焦点は

$$(\pm\sqrt{10},\ 0)$$

漸近線は

$$9x^2-y^2=0 \qquad \therefore \quad y=\pm 3x$$

(2) C と l を連立すると

$$9x^2-(mx+n)^2=9$$

$$\therefore \quad (9-m^2)x^2-2mnx-(9+n^2)=0 \quad \cdots\cdots①$$

この x に関する２次方程式が異なる２つの実数解をもつので

$$9-m^2\neq 0 \text{ かつ } m^2n^2+(9-m^2)(9+n^2)>0$$

$$\iff \quad m\neq\pm 3 \text{ かつ } m^2-n^2<9$$

(3) $y=mx+n$ と $y=\pm 3x$ を連立すると $m\neq\pm 3$ のとき

$$mx+n=\pm 3x \quad \iff \quad x=\frac{-n}{m-(\pm 3)}$$

を得る．ここで①の２つの解を α，β とおくと

$$\mathrm{PR}=\mathrm{QS} \quad \iff \quad \left|\frac{-n}{m-3}-\alpha\right|=\left|\frac{-n}{m+3}-\beta\right|$$

より，これを示す．

$$\left|\frac{-n}{m-3}-\alpha\right|^2-\left|\frac{-n}{m+3}-\beta\right|^2$$

$$=\left\{\frac{n^2}{(m-3)^2}+\frac{2\alpha n}{m-3}+\alpha^2\right\}-\left\{\frac{n^2}{(m+3)^2}+\frac{2\beta n}{m+3}+\beta^2\right\}$$

$$=\frac{12mn^2}{(m-3)^2(m+3)^2}+\frac{2n\{(m+3)\alpha-(m-3)\beta\}}{(m-3)(m+3)}+\alpha^2-\beta^2$$

$$=\frac{12mn^2}{(m-3)^2(m+3)^2}+\frac{6n(\alpha+\beta)}{(m-3)(m+3)}+(\alpha-\beta)\left\{\frac{2mn}{(m-3)(m+3)}+(\alpha+\beta)\right\}$$

$$=0 \quad \left(\alpha+\beta=\frac{-2mn}{(m-3)(m+3)} \text{ より}\right)$$

ⒸRECRUIT HOLDINGS

本サービスに関する知的財産権その他一切の権利は著作権者に帰属します。
また本サービスに掲載の全部または一部につき無断複製・転載を禁止します。

第５講　２次曲線

5　次の問いに答えよ．

(1)　p を正の定数とし，点 $\mathrm{F}(0,\ p)$ を焦点にもち，$y=-p$ を準線とする放物線を C とする．C 上の点 $\mathrm{Q}(x_0,\ y_0)$（ただし $x_0 \neq 0$）を考え，点 Q と F を通る直線を l_1，点 Q を通り放物線 C の軸に平行な直線を l_2 とする．このとき，点 Q における C の接線 l は，l_1 と l_2 のなす角を２等分することを示せ．

(2)　放物線 $y=x^2-2\sqrt{2}\,x+4$ 上の点 $\mathrm{R}(a,\ b)$（$a>\sqrt{2}$）における接線と直線 $x=a$ のなす角を $\theta\left(0<\theta<\dfrac{\pi}{2}\right)$ とする．点 R を通り傾きが $\dfrac{1-\tan^2\theta}{2\tan\theta}$ である直線は a によらない定点を通ることを示し，その定点の座標を求めよ．

【答】　(1) 略　(2) $\left(\sqrt{2},\ \dfrac{9}{4}\right)$

【解説】

(1)　Q は $x^2=4py$ 上の点なので　$y=\dfrac{1}{4p}x^2$ より $y'=\dfrac{1}{2p}x$ となり，l の傾き

$$y'=\frac{1}{2p}x_0$$

を得る．

ここで l_2 と $y=-p$ との交点は

$$\mathrm{A}(x_0,\ -p)$$

とおけるので，AF の傾きは

$$\frac{-p-p}{x_0-0}=-\frac{2p}{x_0}$$

となるので

$$\frac{1}{2p}x_0\times\left(-\frac{2p}{x_0}\right)=-1$$

より $\mathrm{AF}\perp l$ である．

AF と l との交点を H とおくと，QA＝QF より H は二等辺三角形 QAF の頂点 Q から底辺に下ろした垂線の足となるので，△QFH と △QAH は合同であり，題意は示された．

©RECRUIT HOLDINGS

本サービスに関する知的財産権その他一切の権利は著作権者に帰属します。
また本サービスに掲載の全部または一部につき無断複製・転載を禁止します。

(2)
$$y=x^2-2\sqrt{2}x+4$$
$$=(x-\sqrt{2})^2+2$$
$$\iff \quad y-2=\frac{1}{4\times\frac{1}{4}}(x-\sqrt{2})^2$$

ここで，$\theta\neq\dfrac{\pi}{4}$ のとき

$$\tan\left(\frac{\pi}{2}-2\theta\right)=\frac{1}{\tan 2\theta}$$
$$=\frac{1-\tan^2\theta}{2\tan\theta}$$

であるが，これは $\theta=\dfrac{\pi}{4}$ のときにも成立するので，(1)において $p=\dfrac{1}{4}$ として x 軸方向に $\sqrt{2}$，y 軸方向に 2 平行移動したものを考えると，題意の定点は

$$\left(0,\ \frac{1}{4}\right)+(\sqrt{2},\ 2)=\left(\boldsymbol{\sqrt{2},\ \frac{9}{4}}\right)$$

ⒸRECRUIT HOLDINGS

本サービスに関する知的財産権その他一切の権利は著作権者に帰属します。
また本サービスに掲載の全部または一部につき無断複製・転載を禁止します。